

3- §. Матрицалар. Матрицалар устида амаллар.

Матрицанинг ранги.

Чизикли тенгламалар системасини текшириш

1.3.1. Сонларнинг m та сатр ва n та катордан иборат тўғри тўртбурчакли жадвали $m \times n$ ўлчамли матрица дейилади. Бу матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади.

Агар $m=1$ бўлса, сатр матрица, $n=1$ бўлса устун матрица, $m=n$ бўлса, квадрат матрица ҳосил бўлади. Квадрат A матрица учун шу матрицанинг элементларидан тузилган n - тартибли детерминантни ҳисоблаш мумкин. Бу детерминант $\det A$ ёки $|A|$ оркали белгиланади:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Агар $\det A = 0$ бўлса, у ҳолда A матрица *махсус*, $\det A \neq 0$ бўлса, *махсусмас* дейилади.

Бош диагоналида турган элементлари бирга, қолган элементлари нолга тенг бўлган квадрат матрица *бирлик матрица* деб аталади ва E билан белгиланади:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Равшанки, $\det E = 1$.

Агар ўлчамлари бир хил $m \times n$ бўлган икки матрицанинг барча мос элементлари ўзаро тенг бўлса, бу матрицалар *тенг* дейилади.

1.3.2. Бир хил $m \times n$ ўлчамли A ва B матрицанинг *йиғиндиси* деб ўша ўлчамли шундай $C = A + B$ матрицага айтиладики, унинг ҳар бир элементи A ва B матрицаларнинг мос элементлари йиғиндисидан иборат бўлади.

$m \times n$ ўлчамли A матрицанинг λ *сонга кўпайтмаси* деб, ўша ўлчамдаги $B = \lambda \cdot A$ матрицага айтиладики, бу матрица элементлари A матрица элементларини λ га кўпайтиришдан ҳосил бўлади.

$m \times k$ ўлчамли A матрицанинг $k \times n$ ўлчамли B матрицага кўпайтмаси деб, $m \times n$ ўлчамли шундай $C = A \cdot B$ матрицага айтиладики, унинг c_{ij} элементи A матрицанинг i -сатри элементлари-ни B матрицанинг j -устунидаги мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Агар $AB = BA$ бўлса, у ҳолда A ва B матрицалар ўрни алмашинадиган ёки коммутатив матрицалар дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг AB ва BA кўпайтмаларини топинг.

Ечиш. AB матрица 2×2 ўлчамга эга бўлади:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 28 & -39 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BA матрица 3×3 ўлчамга эга бўлади:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-4) & (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 & 4 \cdot 1 + (-5) \cdot (-4) & 4 \cdot (-2) + (-5) \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 \\ 3 & -13 & 17 \\ 2 & 24 & -33 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$AB \neq BA$ бўлганлиги сабабли A ва B матрицалар коммутатив эмас.

1.3.3. Агар квадрат матрица махсусмас бўлса, у ҳолда $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона A^{-1} матрица мавжуд бўлади ва у A матрицага *тескари матрица* дейилади. A матрицанинг A^{-1} тескари матрицаси қуйидагича аникланади: